

Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина
Ю.А.»

И.А. Челышева

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА

Решение задач по материалам второго модуля

Методические рекомендации
к выполнению практической работы и подготовке к модулю
по курсу: «Начертательная геометрия для студентов направлений

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
09.03.04 «Программная инженерия»
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
23.03.01 «Нефтегазовое дело»
29.03.05 «Конструирование изделий легкой промышленности»

очной и заочной формы обучения

Энгельс 2026

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

Многие геометрические элементы при проецировании на плоскость представляются в искаженном виде. Часто требуется знать натуральную величину какого-либо элемента или его расположение. В решениях задач стремятся разместить объект таким образом, чтобы требуемый элемент был параллелен или перпендикулярен плоскости проекций, например, прямая стала параллельной или вырождалась в точку, плоскость проецировалась в линию и т.д.

Для получения истинного изображения предметов существуют методы преобразования, которые можно классифицировать на два типа:

- построение по двум проекциям, заданными на основной плоскости, еще одной дополнительной проекции, на неосновную плоскость, которая вводится в существующую систему таким образом, чтобы проецируемый объект располагался параллельно и перпендикулярно вводимой плоскости, сам оставаясь при этом неподвижно.
- изменение положения объекта в пространстве, при неизменной системе плоскостей проекций, до частного положения.

СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ

Способ вращения вокруг некоторой оси заключается в том, что изображаемый объект или его элемент вращается вокруг указанной оси до требуемого положения относительно неподвижной, данной системы плоскостей проекций.

В качестве оси вращения может быть взята любая прямая. В практике преобразования комплексного чертежа лучше использовать вращение вокруг проецирующих осей и линий уровня. Если ось вращения выбрать проходящей через один из концов отрезка, то построение упростится, так как точка, через которую проходит ось, будет неподвижной и для поворота отрезка надо построить новое положение проекции только одной его точки – другого конца.

Если вращать отрезок прямой линии вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, то проекция на эту плоскость не изменяется ни по виду, ни по величине – меняется лишь положение этой проекции относительно оси проекций. На плоскости параллельной оси вращения все точки проекции отрезка перемещаются по прямым, параллельным оси проекций и проекция изменяется и по форме и по величине. Точка А вращается в плоскости α вокруг неподвижной оси i перпендикулярной плоскости Π_1 , описывает окружность радиусом R (рис.1 а, б). При этом на плоскости Π_1 траектория (окружность) точки А проецируется в натуральную величину, а на плоскость Π_2 траектория проецируется в

линию, параллельную оси x .

Для поворота отрезка АВ (рис.1 в) выбрана ось вращения i , перпендикулярная к плоскости Π_1 ($i_2 \perp x$) и проходящая через точку В ($B_1 \equiv i_1$). В плоскости Π_2 проекция оси i не указана.

При повороте вокруг такой оси располагаем отрезок параллельно плоскости Π_2 . Горизонтальная проекция отрезка в новом положении параллельна оси x ($A_1'' // x$). Точка А вращается в плоскости параллельной горизонтальной плоскости проекций и ее фронтальная проекция переместится в точку A_2'' , по линии параллельной оси x до пересечения с линией связи, проведенной от горизонтальной проекции A_1'' . Соединив A_2'' с B_2 получим фронтальную проекцию отрезка АВ в новом положении. Эта проекция $A_2''B_2$ выражает натуральную величину отрезка АВ и натуральную величину угла наклона (α) отрезка АВ к плоскости Π_1 .

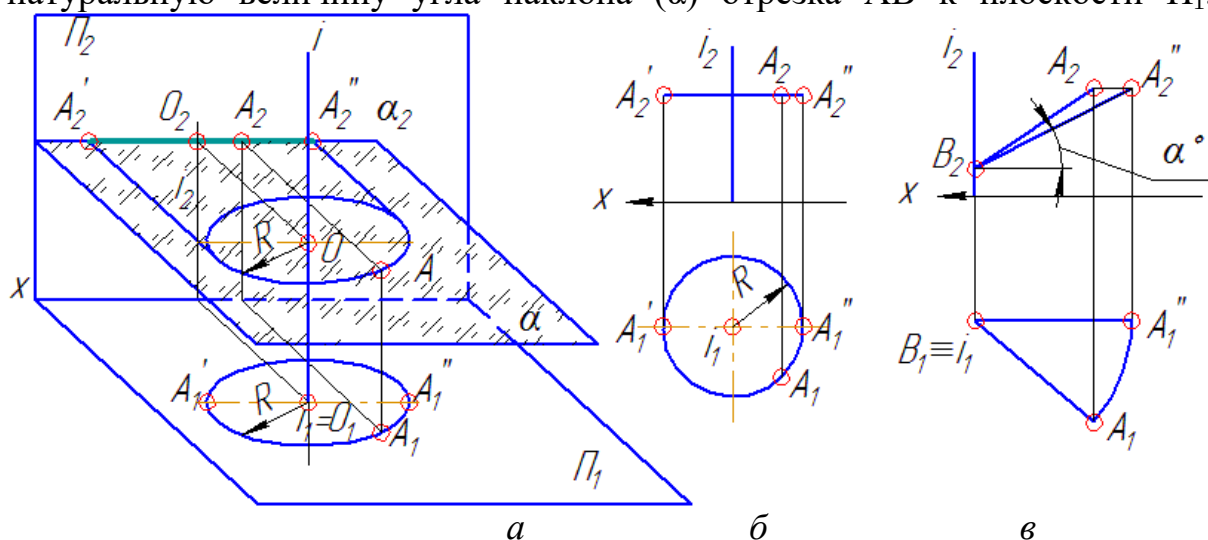


Рис.1

Аналогичное решение последует, если за ось вращения принять $i \perp \Pi_2$ (рис.2). Тогда $i_1 \perp x$, $B_2 \equiv i_2$. При повороте АВ вокруг оси i фронтальная проекция займет положение параллельное оси x $A_2''B_2 // x$, проекция $A_1''B_1$ выражает натуральную величину отрезка АВ, а угол β определяет натуральную величину угла наклона отрезка АВ к плоскости Π_2 .

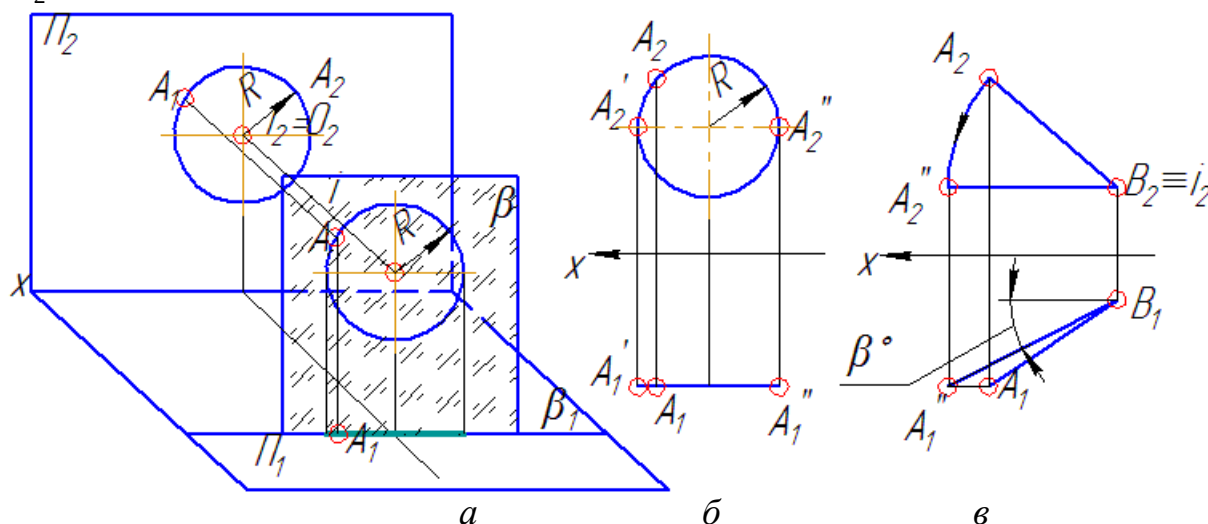


Рис. 2

Задание №1. Найти натуральную величину Отрезка АВ методом вращения вокруг оси перпендикулярной плоскости Π_1 и отрезка CD вращением вокруг оси перпендикулярной плоскости Π_2 (рис.3).

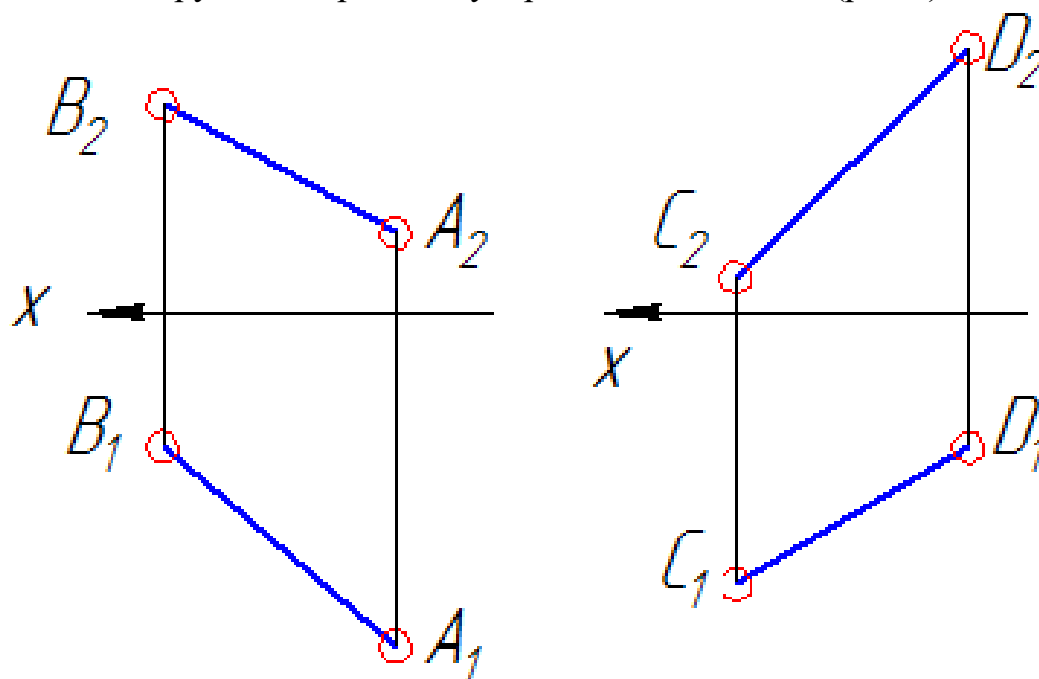


Рис. 3

СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Плоскопараллельным перемещением геометрической фигуры называется такое перемещение, при котором все ее точки перемещаются в плоскостях, параллельных между собой. Плоскопараллельное движение фигуры – это вращение вокруг незакрепленной оси.

Рассмотрим применение плоскопараллельного перемещения для определения натуральной величины треугольника. Для этого выполним два последовательных плоскопараллельных перемещения: первое – перпендикулярно фронтальной плоскости проекций, а второе – параллельно горизонтальной плоскости проекций.

Пусть задан треугольник ACB ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$) (рис.4). Найти натуральную величину треугольника.

Решение заключается в перемещении треугольника до состояния параллельного одной из плоскостей проекций Π_1 или Π_2 (в нашем случае Π_1). На первой стадии переместим плоскость треугольника таким образом чтобы треугольник занял положение перпендикулярное плоскости проекций (Π_2). Для этого в плоскости треугольника ABC проведем горизонталь h (h_1 , h_2).

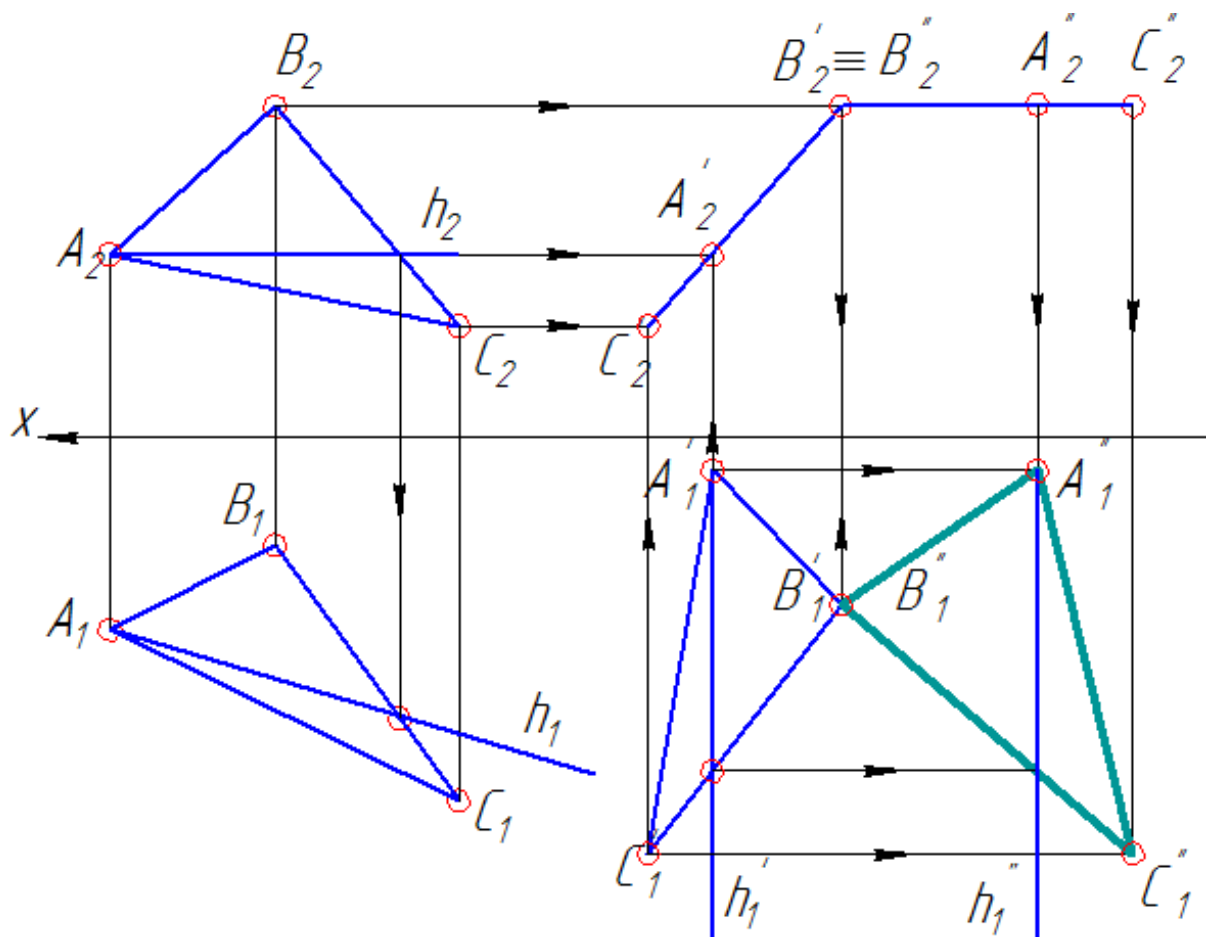


Рис. 4

Поворачиваем треугольник ABC в плоскости Π_1 вокруг произвольной оси (перпендикулярной Π_1), которую на чертеже не указываем, но при необходимости можем найти, до положения, когда проекция горизонтали h_1 окажется перпендикулярной оси x . При этом горизонтальная проекция треугольника сохраняет свой вид и величину ($A_1B_1C_1 = A'_1B'_1C'_1$). При таком повороте точки A , B и C перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости Π_1 . Из точек A'_1 , B'_1 , C'_1 проводим линии связи в плоскость Π_2 до пересечения с горизонтальными линиями связи, проведенными из точек A_2 , B_2 , C_2 , получим проекцию $A'_2B'_2C'_2$ треугольника ABC , которая выродится в прямую линию. Это означает, что новое положение треугольника ABC является проецирующим (перпендикулярным).

На следующем этапе осуществляем поворот, приводящий треугольник в положение параллельное плоскости Π_1 ($ABC // \Pi_1$). Подразумевается, что ось вращения перпендикулярна Π_2 . Теперь фронтальная проекция при повороте сохраняет свой вид и величину, полученные точки A'_1 , B'_1 , C'_1 переместятся в плоскостях, параллельных плоскости Π_2 , до положения A''_2 , B''_2 и C''_2 . Проекция точек A''_1 , B''_1 и C''_1

находим на пересечении горизонтальных и вертикальных линий связи. Проекция $A_1''B_1''C_1''$ будет натуральной величиной треугольника ABC.

Задание №2. Найти натуральную величину треугольника ABC (рис.5), методом плоскопараллельного перемещения, используя фронталь f плоскости.

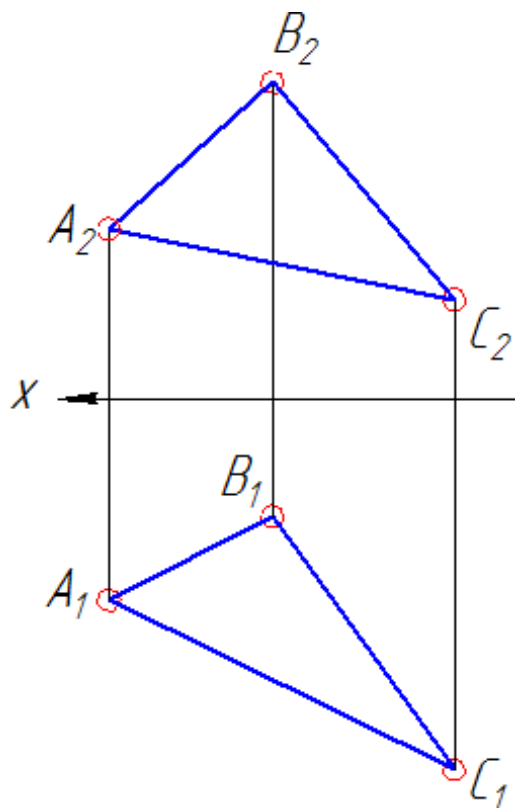


Рис.5

Плоскопараллельным перемещением можно определить натуральную величину отрезка прямой общего положения или преобразовать его в проецирующий. Для этого в одной из плоскостей в рассматриваемом примере в плоскости Π_1 повернем вокруг оси, перпендикулярной к плоскости Π_1 , но эту ось на чертеже не указываем. Так как горизонтальная проекция отрезка не меняет своей величины, то проекцию $A_1'B_1'$ берем равной A_1B_1 и располагаем параллельно оси x . Такое положение проекции дает основание полагать, что сам отрезок параллелен плоскости Π_2 (рис.6). Находим фронтальную проекцию $A_2'B_2'$ отрезка AB по линиям связи, проведенным в плоскости Π_2 от точек A_2 и B_2 параллельно оси x и в плоскости Π_1 от точек A_1' и B_1' перпендикулярно оси x . На пересечении линий связи получим фронтальную проекцию $A_2'B_2'$ нового положения отрезка AB. Проекция $A_2'B_2'$ выражает натуральную величину отрезка AB. Второй поворот выполняем вокруг оси перпендикулярной плоскости Π_2 до положения

перпендикулярности AB к плоскости Π_1 , расположив проекцию $A_2''B_2'' \perp x$, горизонтальная проекция вырождается в точку $A_1'' \equiv B_1''$.

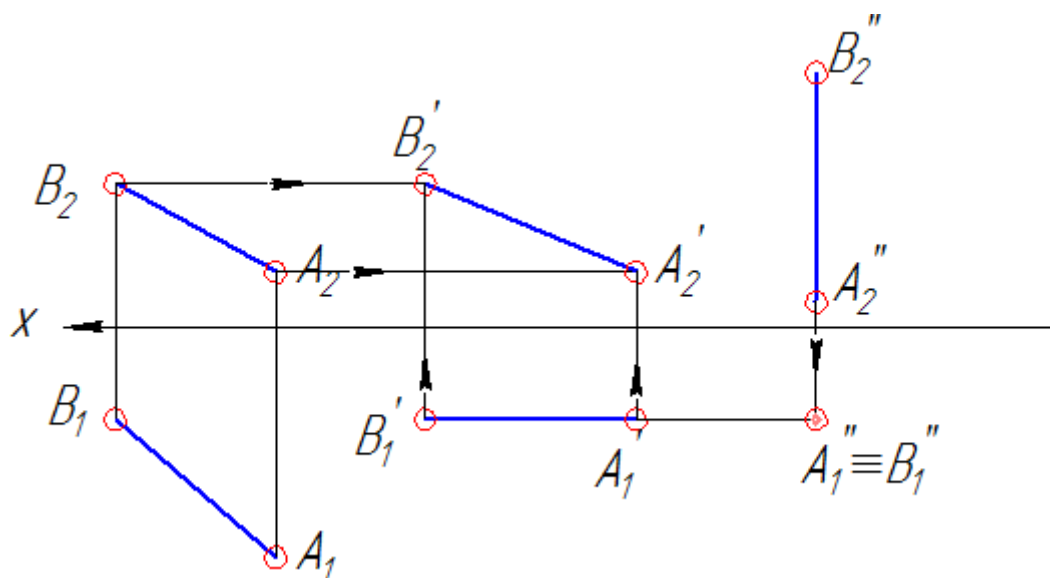


Рис.6

Задание №3. Преобразовать отрезок общего положения (рис.7) в проецирующий (перпендикулярный).

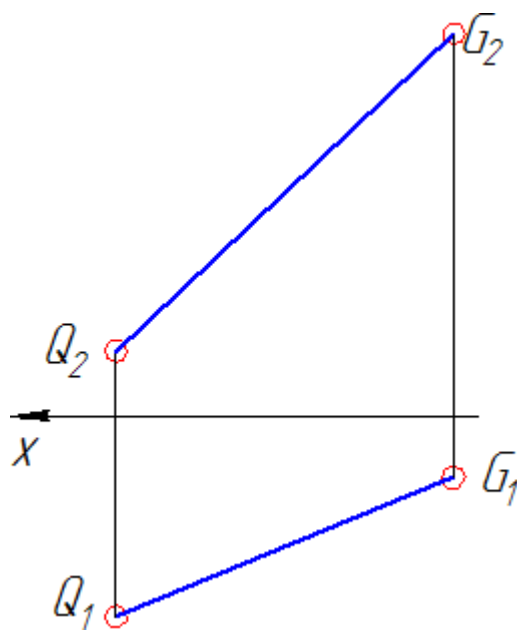


Рис.7

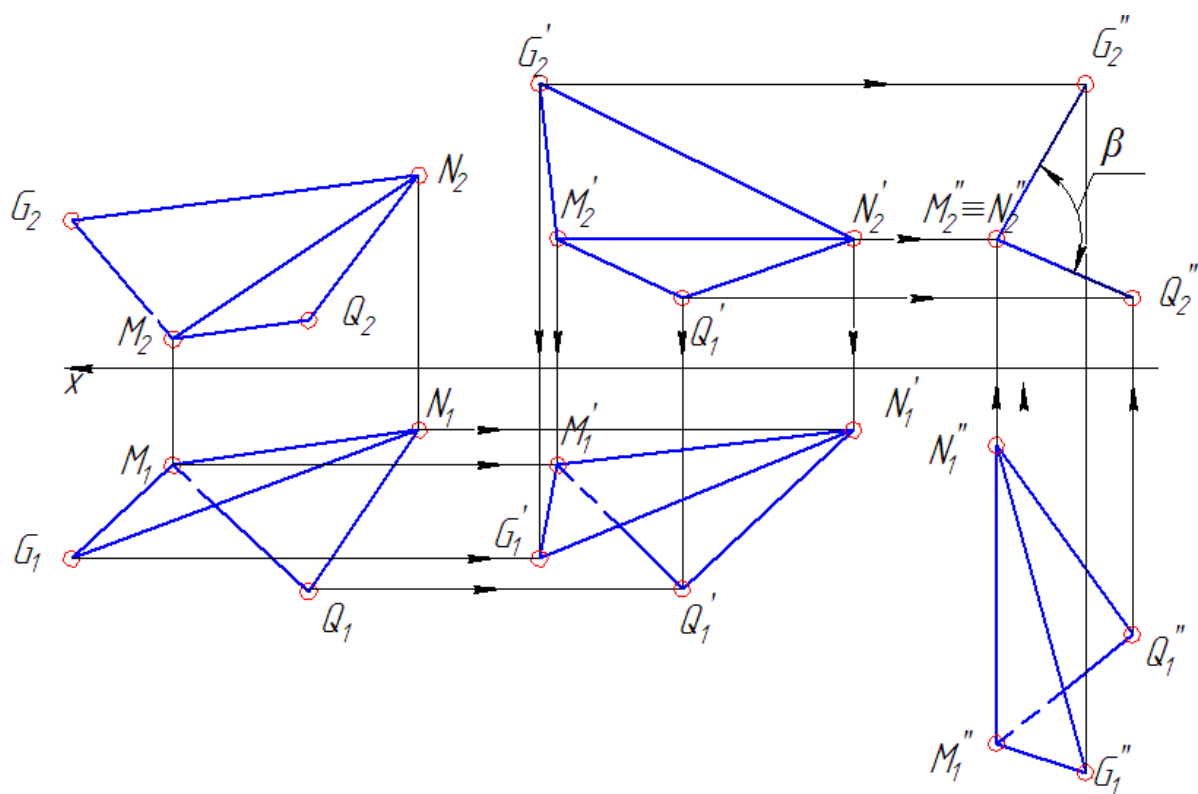
Плоскопараллельное перемещение можно использовать и для определения натуральной величины двугранного угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями. Решение сводится к преобразованию двугранного угла в линейный, измеряющий двугранный угол. Ребром двугранного угла служит линия, образованная пересечением граней. Если ребро окажется перпендикулярным к плоскости, то на эту плоскость ребро

проецируется в точку, а грани в виде отрезков, угол между которыми равен линейному углу данного двугранного (рис.8).

Пусть дан двугранный угол, образованный треугольными гранями QMN и MGN. Найти натуральную величину этого угла.

Решение заключается в перемещении двугранного угла таким образом, чтобы ребро MN, заняло положение, перпендикулярное Π_2 . Фронтальную проекцию двугранного угла, вращаем вокруг оси, без указания ее, перпендикулярной Π_2 до положения при котором ребро MN будет параллельно оси x $M'_2N'_2 // x$. Фронтальная проекция двугранного угла сохраняя свой вид и величину займет новое положение $M'_2N'_2G'_2Q'_2$. По линиям связи, проведенным от M_1, N_1, G_1, Q_1 параллельно оси x и от M'_2, N'_2, G'_2, Q'_2 перпендикулярно оси x определяем горизонтальную проекцию $M'_1N'_1G'_1Q'_1$ двугранного угла.

Второй поворот осуществляем вокруг произвольной оси (в задаче не показана) перпендикулярной Π_1 . Горизонтальная проекция двугранного угла при повороте сохраняет свой вид и размер, но занимает новое положение $M''_1N''_1G''_1Q''_1$, при котором ребро MN перпендикулярно оси x ($M''_1N''_1 \perp x$). Фронтальную проекцию $M''_2N''_2G''_2Q''_2$ найдем по линиям связи, при этом $M''_2 \equiv N''_2$, а грани проецируются в линии, угол β между которыми будет линейным углом двугранного.



Задание № 4. Найти натуральную величину двугранного угла β между гранями MNQ и GMN , методом плоскопараллельного перемещения (рис.9).

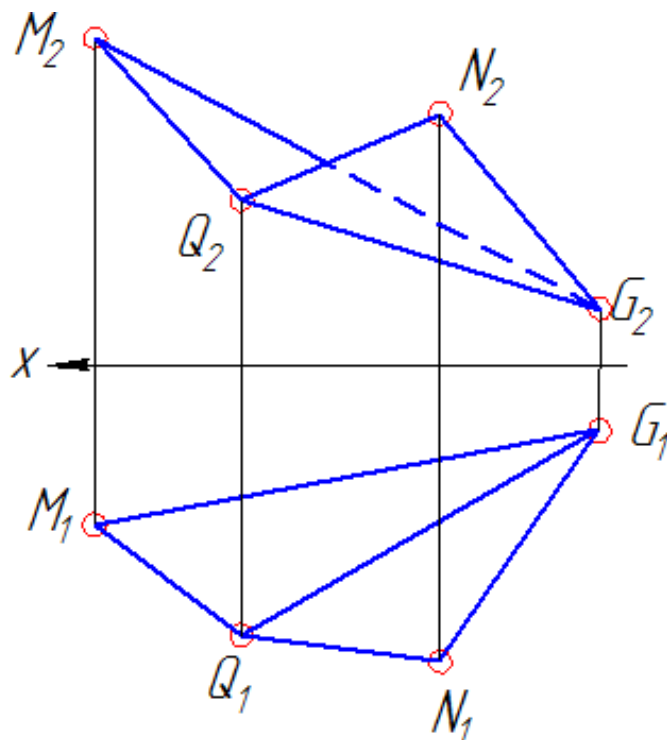


Рис.9

ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ЛИНИИ УРОВНЯ

Для определения формы и размеров треугольника (или любой фигуры) можно ее повернуть вокруг принадлежащей ей горизонтали (фронтالي) так, чтобы треугольник (фигура) расположилась параллельно плоскости Π_1 (Π_2). В момент параллельности плоскости треугольника горизонтальной (фронтальной) плоскости проекций горизонтальные (фронтальные) проекции каждой из перемещающихся вершин окажутся удаленными от оси вращения на расстоянии, равным радиусу вращения данной точки. Рассмотрим вращение треугольника вокруг горизонтали. Задача: Найти натуральную величину треугольника ABC.

Проведем горизонталь h (h_1, h_2) ($h_2 \parallel x_{12}$, h_1 - по принадлежности) плоскости треугольника ABC ($h \subset ABC$). Вершины B и C будем вращать вокруг горизонтали h_1 , вершина A остается неподвижной, так как она лежит на горизонтали (рис.10).

Вращение вершин вокруг горизонтали осуществляем по очереди. Вращаем вершину B.

Точка B вращается вокруг некоторой оси, описывая дугу окружности радиусом $R_{вр}$ в некоторой плоскости $\gamma \perp \Pi_1$. Радиус вращения $R_{вр}$ находим опустив перпендикуляр из B_1 к h_1 . Пересечение перпендикуляра с h_1 отметим точкой (O_1') , которая является центром вращения вершины B. Проекция B_1O_1' будет радиусом вращения ($R_{вр}$). Определяем натуральную

Рис.8

12

Вращаем вершину С.

Точка С вращается вокруг некоторой оси, описывая дугу окружности радиусом $R_{вр}$ в некоторой плоскости $\beta \perp \Pi_1$. Радиус вращения $R_{вр}$ находим опустив перпендикуляр из C_1 к h_1 . Пересечение перпендикуляра с h_1 отметим точкой (O_1''), которая является центром вращения вершины С. Проекция $O_1''C_1$ будет радиусом вращения ($R_{вр}$) вершины С. Определяем натуральную величину радиуса вращения методом прямоугольного треугольника. Из вершины C_1 восстанавливаем перпендикуляр p к отрезку $O_1''C_1$, на котором от C_1 откладываем Δz_1 - разность высот точек С и O'' , отметим т C_1' , которую соединим с O_1'' . $O_1''C_1'$ будет натуральной величиной $O_1''C_1$ - радиуса вращения вершины С вокруг горизонтали. Вращением вокруг O_1'' перемещаем натуральную величину $O_1''C_1'$ в плоскость вращения β_1 и отмечаем т C_1'' .

Соединим точки A_1, C_1'' и B_1'' получим новое положение проекции плоскости треугольника АВС, параллельного плоскости Π_1 . Следовательно, $A_1C_1''B_1''$ определяет натуральную величину треугольника АВС.

Задание № 5. Определить натуральную величину треугольника АВС методом вращения вокруг фронтали (рис.11).

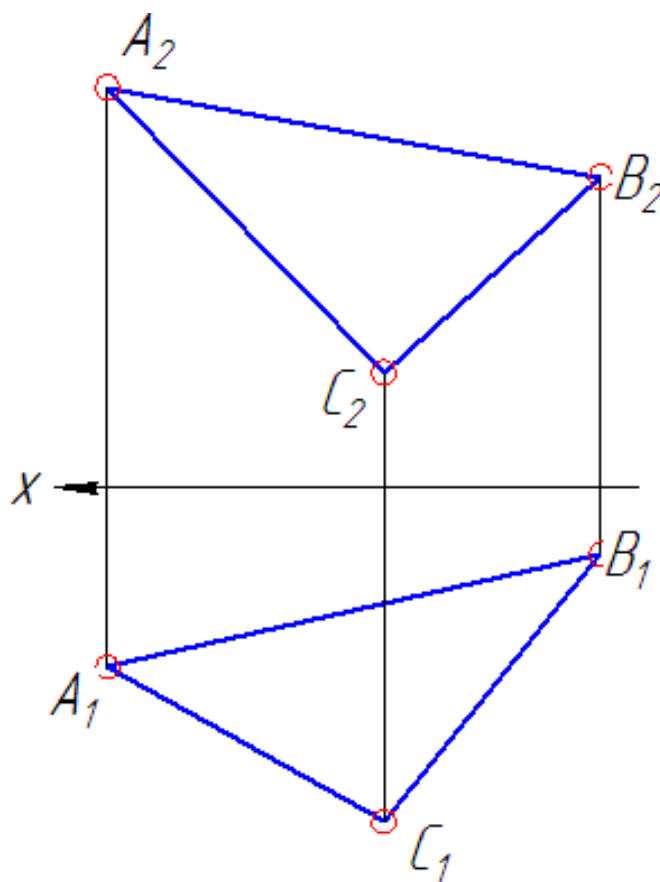


Рис. 11

Рис.10

Задание №6. Найти натуральную величину угла при вершине А, вращение вокруг горизонтали (рис.12)

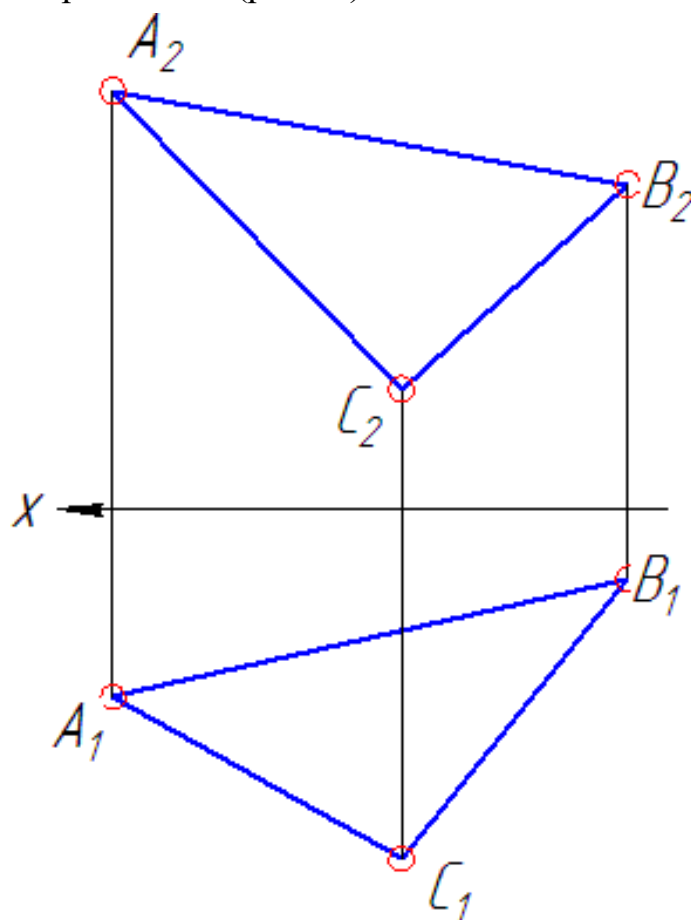


Рис.12

СПОСОБ ПЕРЕМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ.

Сущность способа заключается в том, что положение изображаемых объектов в пространстве остается неизменным, а система плоскостей Π_1 Π_2 дополняется новыми плоскостями, образующими с Π_1 и Π_2 или между собой, системы двух взаимно перпендикулярных плоскостей, принимаемых за плоскости проекций. Каждая новая система выбирается так, чтобы получить положение, наиболее удобное для выполнения нужного построения. Дополнительная плоскость, вводимая в систему Π_1 , Π_2 в качестве плоскости проекций, выбирается согласно какому-либо условию, например, получить натуральную величину отрезка, угол его наклона к плоскости проекций, преобразовать отрезок в проецирующий и т. д.

В случае определения натуральной величины отрезка необходимо ввести дополнительную плоскость параллельную отрезку AB ($AB \parallel \Pi_4$) (рис. 13) ось x_{14} параллельна $A_1 B_1$ ($x_{14} \parallel A_1 B_1$). Следовательно, на эюре в плоскости Π_1 проводим ось $x_{14} \parallel A_1 B_1$ (рис.14). В плоскости Π_4 расстояние от оси x_{14} до A_4 (B_4) равняется расстоянию от оси x_{12} до A_2

(B_2) в плоскости Π_2 ($A_{x_{12}}A_2 = B_{x_{14}} B_4$; ($A_{x_{12}} B_2 = B_{x_{14}} B_4$) (рис.14). На эюре в плоскость Π_4 перпендикулярно новой оси x_{14} проводим линии связи, на которых от оси x_{14} откладываем высоту точек.

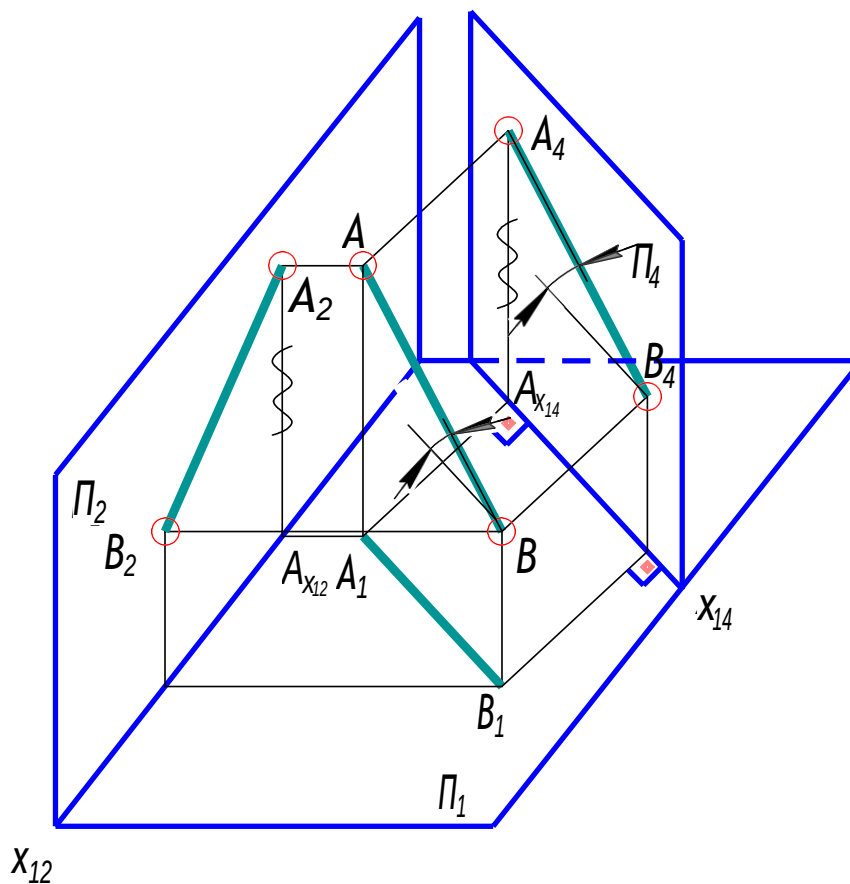


Рис.13

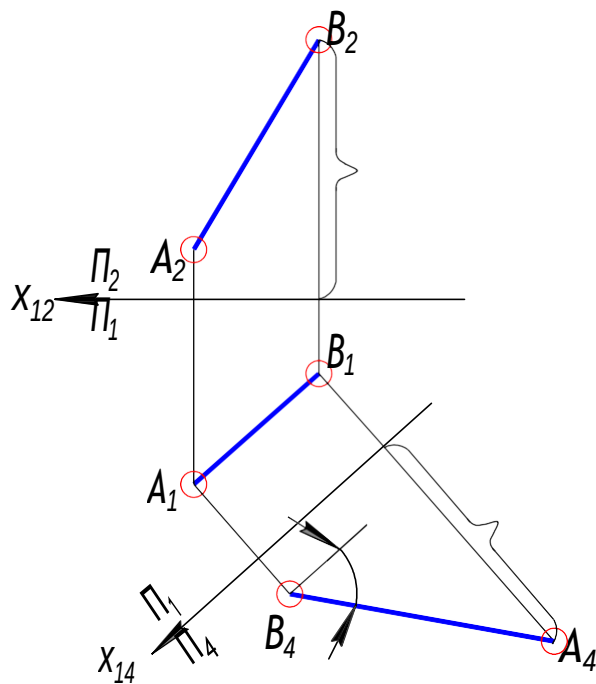


Рис. 14

В данной задаче можем найти угол наклона отрезка АВ к плоскости Π_1 , который будет измеряться углом между A_4B_4 и осью x_{14} .

$$x_{12} \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_{14} \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$$

$\Pi_4 \parallel AB$, $x_{14} \parallel A_1B_1$

Задание № 7. Найти натуральную величину отрезка АВ (рис.15) прямой общего положения и угол его наклона к плоскости Π_2 .

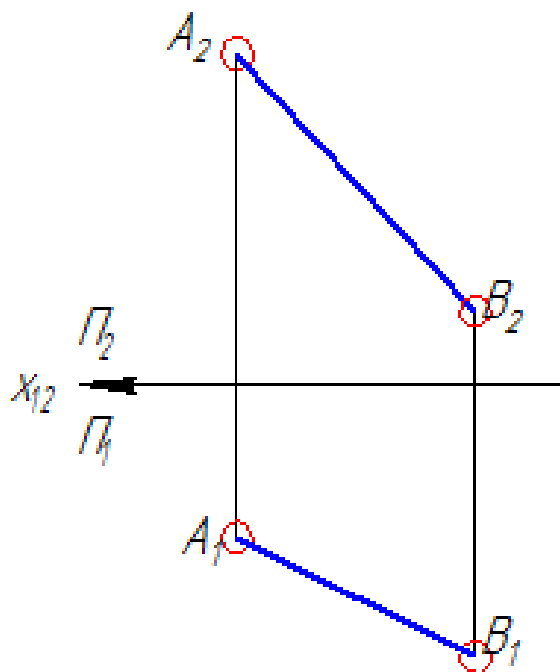


Рис.15

При преобразовании отрезка прямой общего положения в проецирующий недостаточно одной замены, необходимо произвести две замены плоскостей проекций. Сначала вводим новую плоскость проекций Π_4 параллельную отрезку АВ, с помощью такой замены найдем натуральную величину отрезка АВ. На следующем этапе введем плоскость проекций Π_5 перпендикулярную отрезку АВ (рис.15). Символически можно записать:

$$x_{12} \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_{14} \frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_{45} \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$$

1. $\Pi_4 \parallel AB$, $x_{14} \parallel A_1B_1$
2. $\Pi_5 \perp AB$, $x_{45} \perp A_4B_4$.

Построение проекции A_1B_1 описано на странице 13-14. Дальнейшее решение будет: проводим ось x_{45} новой плоскости перпендикулярно A_1B_1 и проводим линии связи т.к. $x_{45} \perp A_1B_1$, то линия связи будет одна, на которой в плоскости Π_5 от оси x_{45} отложим расстояние, равное расстоянию от оси x_{14} до B_1 (A_1) $B_1A_1A_{x14}$

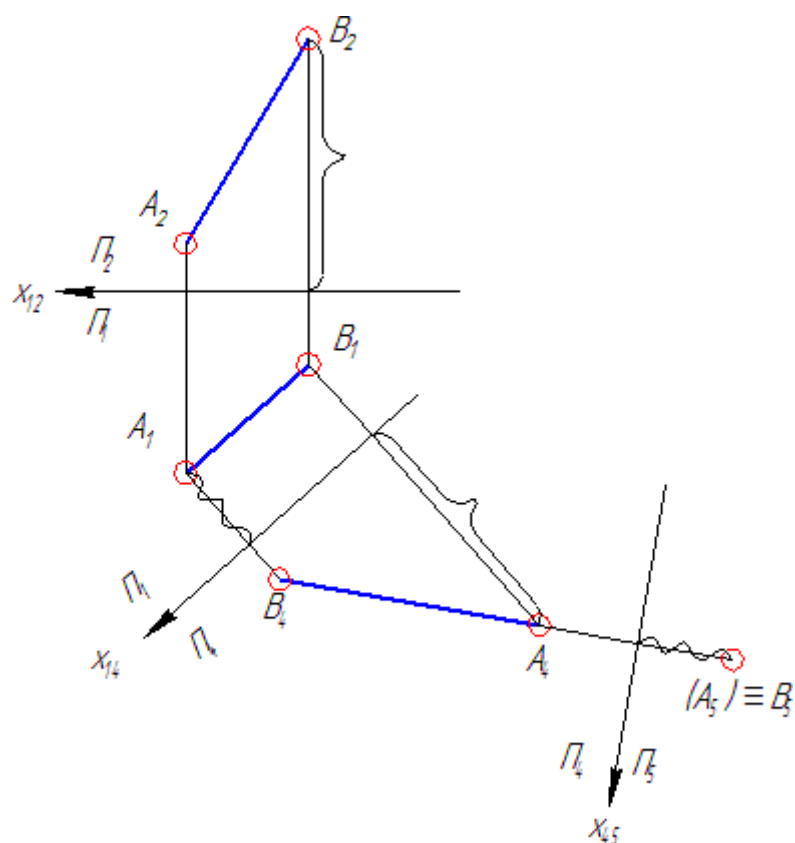


Рис. 16

Задание № 8. Преобразовать отрезок АВ (рис.17) прямой общего положения в проецирующий и найти угол его наклона к плоскости Π_1 .

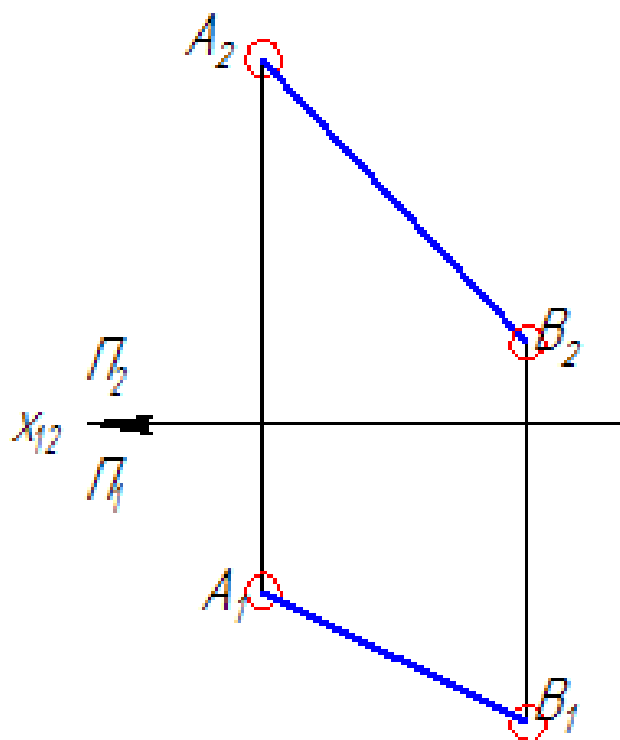


Рис.17

Для определения натуральной величины плоской фигуры (треугольника) общего положения используем метод замены плоскостей, при котором последовательно вводим дополнительные плоскости, сначала перпендикулярную заданному треугольнику, а потом параллельную. Плоскость ABC на чертеже будет перпендикулярна плоскости проекций, если ее горизонтальная проекция h_1 горизонтали h (фронтальная проекция f_2 фронтали f) будет перпендикулярна новой оси x_{14} (x_{24}) (рис.8). Поэтому первым пунктом в решении задачи будет построение горизонтали (фронтали) заданной плоскости. Затем проводим ось x_{14} перпендикулярную горизонтальной проекции горизонтали (или x_{24} перпендикулярную фронтальной проекции фронтали) и проецируем точки A , B и C в плоскость Π_4 .

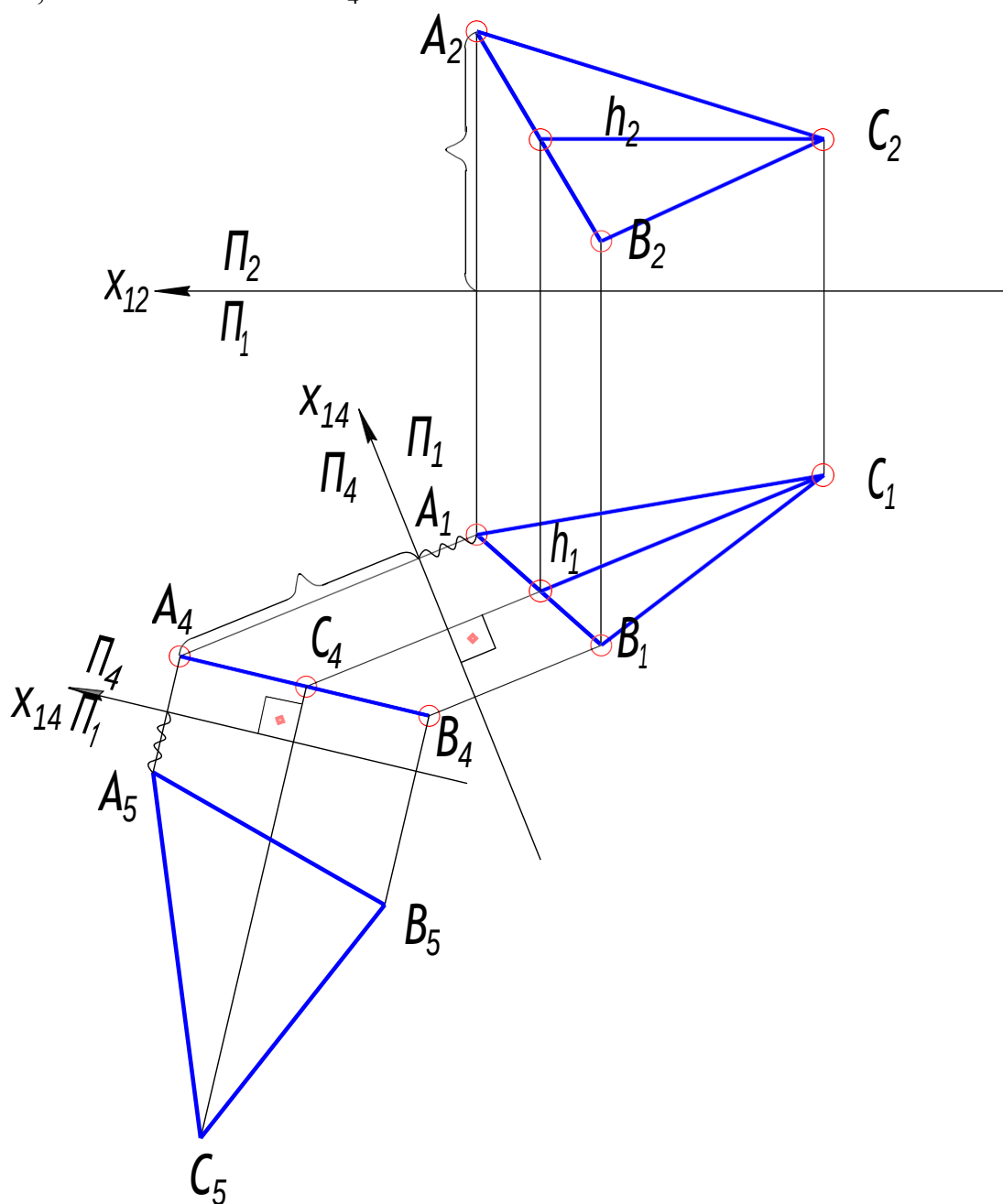


Рис. 18

Расстояние в плоскости Π_4 , откладываем равное координате точек А и В по оси z, т.е. высоту точек А и В. Плоскость треугольника ABC в плоскости Π_4 проецируется в линию ($A_4B_4C_4$). Далее вводим новую плоскость Π_5 , параллельную плоскости треугольника ABC ($\Pi_5 // ABC$). Новую ось проводим параллельно $A_4B_4C_4$. Проецируем точки в плоскость Π_5 . Линии связи проводим перпендикулярно оси x_{45} . В эту плоскость треугольник проецируется в натуральную величину.

Алгоритм решения:

$$x_{12} \rightarrow x_{14} \rightarrow x_{45}$$

$$\Pi_2/\Pi_1 \rightarrow \Pi_1/\Pi_4 \rightarrow \Pi_4/\Pi_5$$

$$\Pi_4 \perp ABC, \quad x_{14} \perp h_1 (h \in ABC)$$

$$\Pi_5 // ABC, \quad x_{45} // A_4 B_4 C_4$$

Задание № 9. Найти угол наклона плоскости треугольника ABC (рис.19), занимающего общее положение к плоскости Π_1 .

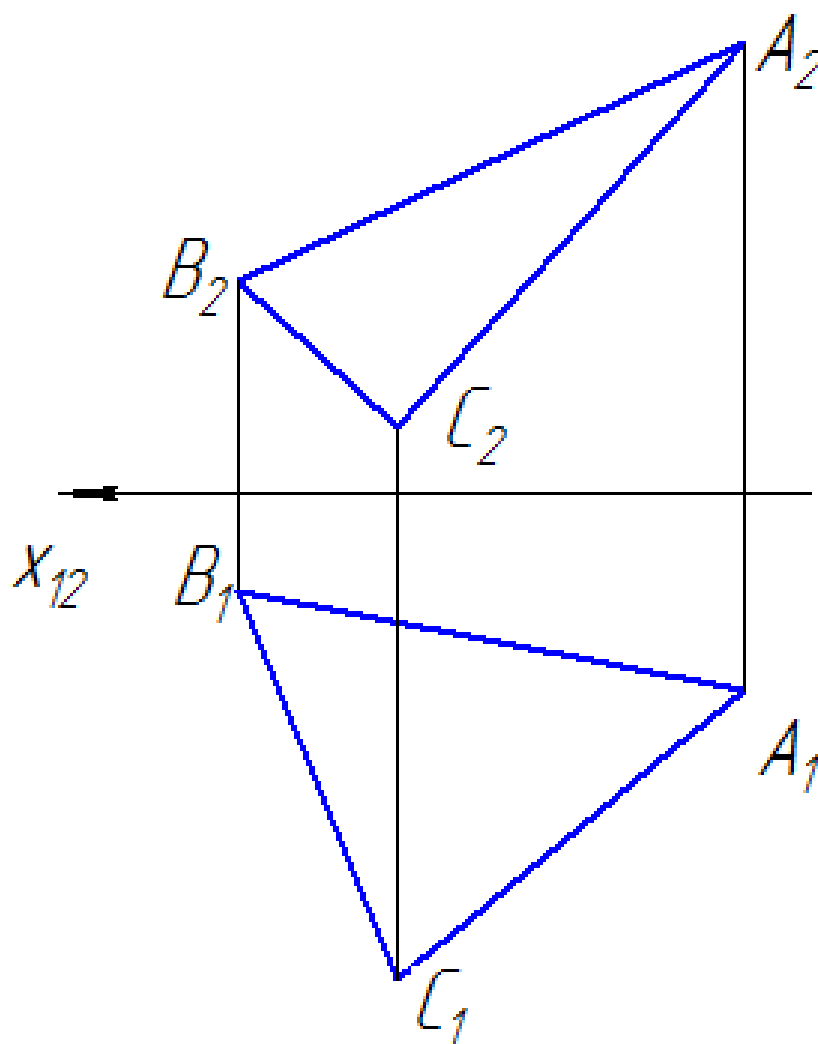


Рис. 19

Задание № 10. Найти натуральную величину треугольника ABC (рис.20), занимающего общее положение и угол его наклона к плоскости Π_2 .

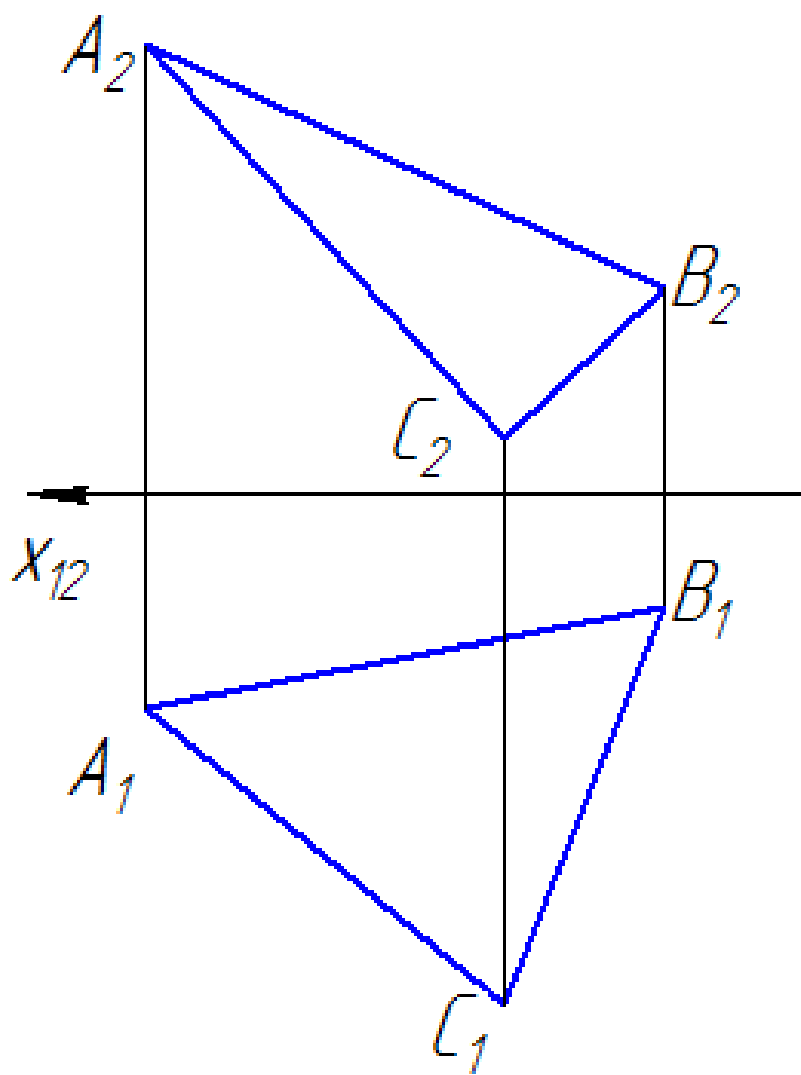


Рис.20

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА

Решение задач по материалам второго модуля

Методические рекомендации
к выполнению практической работы и подготовке к модулю
по курсу: «Начертательная геометрия для студентов всех направлений
очной и заочной форм обучения

ЧЕЛЫШЕВА Ирина Александровна

Подписано в печать	Формат 60х84 1/16
Бум. офсет.	Усл. печ. л.
Тираж 100 экз.	Уч.-изд.л.
Заказ	Бесплатно

Саратовский государственный технический университет
410054, Саратов, Политехническая ул., 77
Отпечатано в РИЦ СГТУ. 410054, Политехническая ул., 77